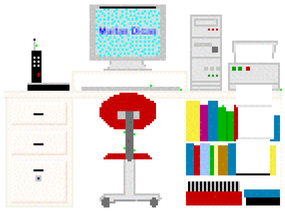


Biometria - EDAP

Binômio de Newton e Triângulo de Pascal

(Leitura complementar ao capítulo2)

Sumário:

Triângulo de Pascal

Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, Puy-de-Dôme, 19 de Junho de 1623 - Paris, 19 de Agosto de 1662) foi um prodígio matemático.

Em torno de 1650 escreveu o "Traité du Triangle Arithmétique" publicado em 1665 e, juntamente com *Pierre Fermat*, estabeleceu os fundamentos da teoria da probabilidade.

Embora não tenha sido o primeiro a trabalhar com o triângulo, este tornou-se conhecido como "triângulo de Pascal" devido ao desenvolvimento e aplicações que Pascal fez de muitas de suas propriedades.

Construído do modo como se vê a seguir, e denominando-se as linhas de n = 1, 2, ... e as colunas de r = 0, 1, 2, ...

Cada entrada $C(n,r)$ é a soma do número acima com o da sua esquerda (também acima) de cada número.

Exemplo:

O número 2, na posição C(*2, 1*) é obtido pela soma de 1 (número acima dele) + 1 (número à esquerda, também acima).

O número 10, na posição C(*5, 2*) é obtido pela soma de 6 (número acima dele) + 4 (número à esquerda, também acima)

n, r	r = 0	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6
n = 0	1						
n = 1	*1*	*1*					
n = 2	1	*2*	1				
n = 3	1	3	3	1			
n = 4	1	*4*	*6*	4	1		
n = 5	1	5	*10*	10	5	1	
n = 6	1	6	15	20	15	6	1

e prossegue-se até atingir os valores de n e r desejados.

Exercício

Complete: O número 20, na posição C(__, __), é obtido pela soma de __ + __.

Coeficientes binomiais

Uma das *aplicações* que Pascal fazia do seu triângulo era a determinação dos coeficientes binomiais quando se faz a expansão do binômio de Newton, sendo que eles correspondem aos números C(n,r).

Por exemplo, a fórmula

$(p + q)^2 = 1p^2 + 2pq + 1q^2$

tem os coeficientes 1, 2 e 1, que estão, precisamente, na linha $n = 2$ no triângulo.

Já, se alguém desejar a expansão de $(p + q)^3$ deverá tomar a linha $n = 3$ no triângulo.

$(p + q)^3 = 1p^3q^0 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + 1p^0q^3$

É importante lembrar que os coeficientes também podem ser obtidos diretamente pela fórmula:

C(n, r) = n! / r!.(n - r)!

Resumindo:

no. genes	**coeficientes**	**no. de combinações**
0	1	1
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
7	1 7 21 35 35 21 7 1	128
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	256 e continua...

Binômio de Newton

Isaac Newton, físico e matemático inglês (1642 - 1727) deu enorme contribuição à Matemática, em 1687 quando escreveu "Principia Mathematica".

Aqui é importante lembrar que denomina-se *Binômio de Newton*, a todo binômio da forma $(a + b)^n$, sendo *n* um número natural, que é chamado de *ordem* do binômio.

Assim, para determinar quais são as combinações possíveis quando uma distribuição possui os parâmetros *p* e *q*, faz-se a expansão do

Binômio de Newton: $(p + q)^n$.

Para expandir uma equação, pode-se seguir os passos:

1. Todos os membros terão o termo *p* e, também, o *q*. (Ou seja, deve existir o termo *p.q* em todos os termos).

2. No primeiro membro atribui-se ao expoente de *p* o valor *n* e ao expoente de *q* o valor *0*. A seguir diminui-se de *1* o valor do expoente de *p* e aumenta-se de *1* o valor do expoente de *q*.

Continua-se até o último membro que deve ter o valor *0* no expoente de *p* o valor n no expoente de *q*.

3. A soma dos expoentes de cada membro deve ser igual ao expoente do binômio.

Portanto, a expansão de $(p + q)^2$ é:

$$(p + q)^2 = \_\_\ p^2q^0 + \_\_\ p^1q^1 + \_\_\ p^0q^2$$

Lembrando que qualquer número elevado a zero é igual a 1 e que não é necessário colocar o expoente quando for igual a 1, temos:

$$(p + q)^2 = \_\_\ p^2 + \_\_\ pq + \_\_\ q^2$$

4. Toma-se a sequência numérica obtida no triângulo referente ao número de combinações usado e distribui-se, *ordenadamente*.

No. Comb.	*Binômio*	*Equação expandida*
4	$(p + q)^2$	$1p^2q^0 + 2p^1q^1 + 1p^0q^2$
8	$(p + q)^3$	$1p^3q^0 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + 1p^0q^3$
16	$(p + q)^4$	$1p^4q^0 + 4p^3q^1 + 6p^2q^2 + 4p^1q^3 + 1p^0q^4$
E continua...		

Assim, a expansão de $(p + q)^2$ gera:

$$p^2 + 2pq + q^2$$

Para descobrir quais são os coeficientes das equações com expoentes maiores que 4 é conveniente usar o Triângulo de Pascal, como descrito acima.

Herança quantitativa (ou poligênica)

Na herança quantitativa dois ou mais pares de alelos determinam o fenótipo. Por isso é também denominada herança poligênica.

Os alelos podem ser: *aditivo* ou *indiferente* (ou *não-aditivo*).

Cada alelo *aditivo* determina o aumento da intensidade da expressão do fenótipo, não importando de qual par é esse alelo aditivo.

Os alelos *não-aditivos* não acrescentam nada na expressão do fenótipo.

Herança quantitativa - Identificação

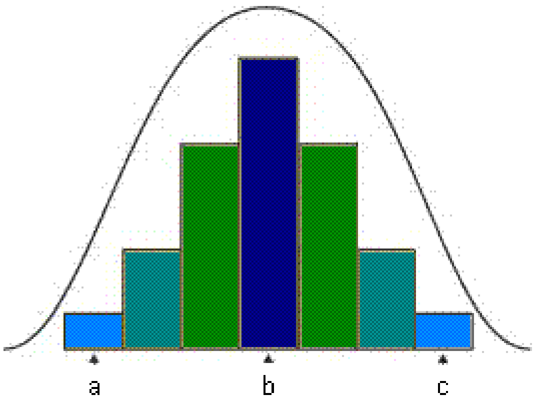
Como identificar e diferenciar a herança quantitativa das demais heranças genéticas?

Na geração F_2 há *vários fenótipos* para uma certa característica, com variação contínua.

Quando estão envolvidos *2 pares* de genes haverá *5* fenótipos possíveis. Se forem *3 pares* serão *7* fenótipos. Se forem *4 pares* serão *9* fenótipos e assim por diante.

- Em F_2 o fenótipo apresenta *variação contínua* ou gradual. Exemplo: No caso da cor da pele na espécie humana, entre os extremos (branco e negro) há diversos fenótipos intermediários, os vários tipos de mulatos.
- A frequência dos fenótipos se distribui em uma curva normal.

Os fenótipos dos tipos extremos (mínimos e máximos) são os observados em frequências menores, enquanto os fenótipos intermediários são encontrados em quantidades maiores. A distribuição quantitativa desses fenótipos estabelece uma curva normal e mostra a expressividade do caráter.



Expressividade do caráter

a = mínima, b = média, c = máxima

Algumas fórmulas podem ajudar a resolver problemas:

1. O número de fenótipos que podem ser encontrados depende do número de pares de alelos envolvidos, que chamamos

n = número de fenótipos = 2n + 1

2. Pode-se calcular a frequência dos fenótipos extremos

Frequência de 1 fenótipo extremo = $(1/4)^n$

3. Pode-se calcular quanto cada gene aditivo acrescenta ao fenótipo. (Lembrar que número de genes = 2*n*).

Valor do gene aditivo = (fenótipo máximo - fenótipo míimo) / 2*n*

Exemplo: Cor da pele humana

No caso da cor da pele humana, considerando apenas 5 fenótipos, envolvendo dois pares de genes N e B, que teriam a mesma função, ou seja, acrescentar uma certa quantidade de melanina à pele, se efetivos (*N* ou *B*) ou não acrescentar nada, se não efetivos (*n* ou *b*).

Fenótipos	***Número de genes***
negro	4 genes efetivos e 0 não efetivos
mulatos escuros	3 genes efetivos e 1 não efetivo
mulatos médios	2 genes efetivos e 2 não efetivos
mulatos claros	1 gene efetivo e 3 não efetivos
branco	0 genes efetivos e 4 não efetivos

Se acontecer um cruzamento entre dihíbridos, quais serão as proporções fenotípicas da descendência?

Resolução 1:

Com conhecimentos de *Genética*: (quais são os gametas e os tipos possíveis de filhos gerados?)

NnBb x NnBb
Gametas produzidos por ambos: NB, Nb, nB e nb

gametas	***NB***	***Nb***	***nB***	***nb***
NB	NNBB	NNBb	NnBB	NnBb
Nb	NNbB	NNbb	NnbB	Nnbb
nB	nNBB	nNBb	nnBB	nnBb
nb	nNbB	nNbb	nnbB	nnbb

Observa-se que há 16 combinações genotípicas diferentes, sendo :

1 negro	4 genes efetivos e 0 não efetivo	NNBB	menor frequência = 1/16	maior expressividade
4 mulatos escuros	3 genes efetivos e 1 não efetivo	NNBb ou nNBB		
6 mulatos médios	2 genes efetivos e 2 não efetivos	NNbb, nnBB ou NnBb	maior frequência = 6/16	média expressividade
4 mulatos claros	1 gene efetivo e 3 não efetivos	Nnbb ou nnBb		
1 branco	0 gene efetivo e 4 não efetivos	nnbb	menor frequência = 1/16	mínima expressividade

Ou seja, na descendência chega-se à seguinte proporção fenotípica: 1 negro : 4 mulatos escuros : 6 mulatos médios : 4 mulatos claros : 1 branco

Resolução 2:

Usando o *Triângulo de Pascal*:
Chama-se de p = genes efetivos = 2 (N ou B) e de q = genes não efetivos = 2 (n ou b)
Procura-se no triângulo a linha em que o número de genes é igual a 4.

no. genes	coeficientes
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

1 negro	4 efetivos e 0 não efetivo	*1* $p^4 q^0$
4 mulatos escuros	3 efetivos e 1 não efetivo	*4* p^3q^1
6 mulatos médios	2 efetivos e 2 não efetivos	*6* p^2q^2
4 mulatos claros	1 efetivo e 3 não efetivos	*4* p^1q^3
1 branco	0 efetivo e 4 não efetivos	*1* $p^0 q^4$

Portanto, na descendência chega-se à seguinte proporção fenotípica: 1 negro : 4 mulatos escuros : 6 mulatos médios : 4 mulatos claros : 1 branco
E a equação será:

$$(p + q)^4 = 1\ p^4q^0 + 4\ p^3q^1 + 6\ p^2q^2 + 4\ p^1q^3 + 1\ p^0q^4$$

ou seja:

$$(p + q)^4 = p^4 + 4\ p^3q + 6\ p^2q^2 + 4\ pq^3 + q^4$$

Exercícios

Qual é a equação que representa a expansão dos seguintes binômios:

a. $(p + q)^6$

b. $(p + q)^8$

____

Este "site", destinado prioritariamente aos alunos de Fátima Conti, pretende auxiliar quem esteja começando a se interessar por Bioestatística, computadores e programas, estando em permanente construção. Sugestões e comentários são bem vindos. Agradeço antecipadamente.

____

Endereço dessa página:

HTML: http://www.cultura.ufpa.br/dicas/biome/biotri.htm

PDF: http://www.cultura.ufpa.br/dicas/pdf/biotri.pdf

Última alteração: 9 nov 2009 (Solicito conferir datas. Pode haver atualização só em HTML)